

# Leçon 101 : Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

## 1 Définitions (Rombaldi, Perrin)

### 1.1 Premières définitions

- Définition + équivalence avec le morphisme
- Les exemples de base (translation/conjugaison notamment)

### 1.2 Orbites et stabilisateurs

- Définition orbites + relation équivalence
- Action transitive + fidèle
- Définition stabilisateurs

## 2 Utilisation sur les groupes finis (Perrin)

### 2.1 L'équation aux classe

- Bijection entre stabilisateurs et orbites
- Équation aux classes
- Dév 1 : Nombre endomorphismes diagonalisables de  $\mathbb{F}_q^n$
- Définition de  $E^G$  + corollaire sur les  $p$ -groupes
- Application : centre d'un  $p$ -groupe est non trivial

### 2.2 Action par translation

- L'action est simplement transitive
- Théorème de Cayley

### 2.3 Action par conjugaison

- Définition classe de conjugaison
- Principe de conjugaison
- Exemple des classes de conjugaison de  $\mathcal{S}_n$
- Théorème de Wederburn (p 82 du Perrin)

### 2.4 Théorèmes de Sylow

- Définition  $p$ -Sylow
- Lemme utilisant une action par translation
- Théorème de Sylow

## 3 Autres domaines (Rombaldi, Perrin)

### 3.1 Algèbre linéaire sur les corps finis

- Définitions des objets
- Opération de  $GL(E)$  sur  $P(E)$
- Corollaire : les isomorphismes exceptionnels

### 3.2 Géométrie

- Dév 2 : Groupe isométrie du cube + colorations

### 3.3 Groupes de matrices

- Définition de l'action  $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$
- Les orbites sont les ensembles de matrices de même rang